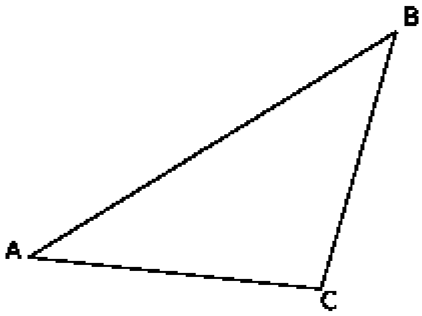
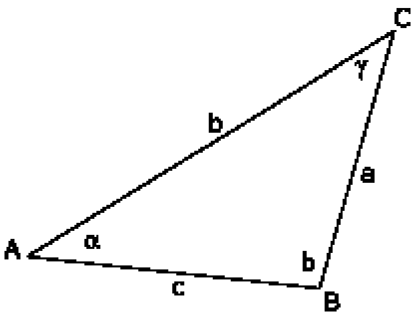
9. TRIÁNGULOS

9.1. Características generales.



Un triángulo ABC es una figura plana limitada por tres rectas que se cortan dos a dos, determinando los segmentos AB, AC y BC, que son los lados del triángulo. Para que tres segmentos formen un triángulo ABC es necesario que cada uno de ellos sea menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

9.2. Nomenclatura de los triángulos.

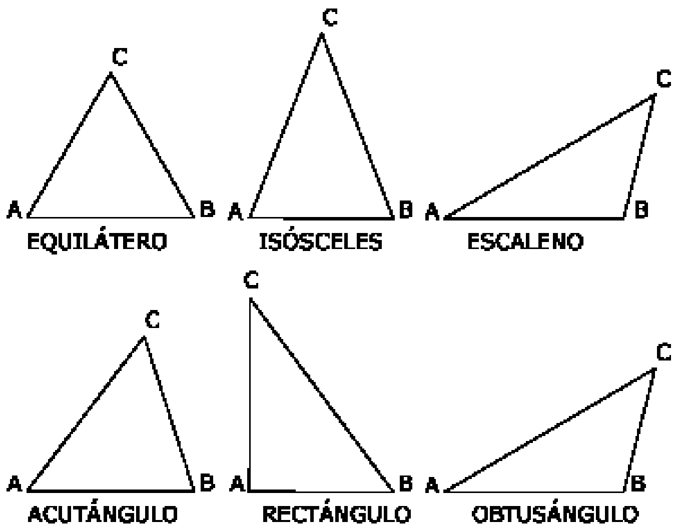


Los triángulos se nombran por sus vértices, **A**, **B** y **C**. El lado opuesto a cada vértice se llama como él, en minúscula: el vértice **A** es opuesto al lado **<u>a</u>**, el **B** al **<u>b</u>** y el **C** al **<u>c</u>**. Los ángulos pueden llamarse como el vértice: $\hat{A}$, con la letra griega **α** o indicando ordenadamente $B\hat{A}C$, donde A es el vértice.

Según los lados.

Equiláteros

Los triángulos que tienen los tres lados iguales. Esto implica que tengan tres ángulos iguales y tres ejes de simetría.



Isósceles

Los triángulos que tienen dos lados iguales. En este caso los lados iguales se llaman **lados** y el lado desigual se llama **base**. Los ángulos que tienen a la **base** como lado son iguales. Los triángulos isósceles sólo tienen un eje de simetría.

Escalenos

Los triángulos que no tienen lados iguales, ángulos son desiguales y no tienen ningún eje de simetría.

Según los ángulos.

Acutángulos

Los triángulos que tienen los ángulos agudos.

Rectángulos

Los triángulos que tienen un ángulo recto. Los lados del ángulo recto se llaman **catetos** y el lado opuesto al ángulo recto se llama **hipotenusa**.

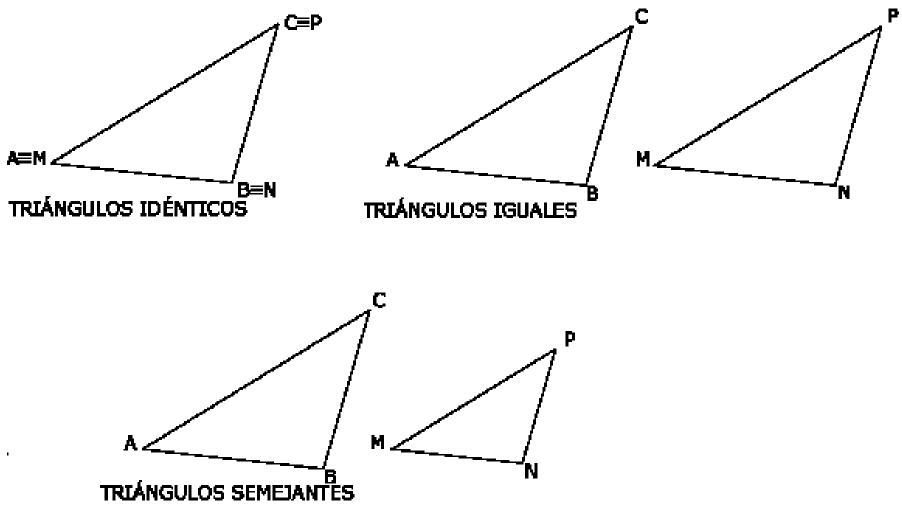
Obtusángulos

Los triángulos que tienen un ángulo obtuso.

Recordamos que la **suma de los ángulos internos** de un triángulo es de 180º.

9.3. Concepto de identidad, igualdad y semejanza entre figuras.

Dos figuras son **idénticas** cuando son iguales y ocupan el mismo lugar. El **signo de identidad** es ≡. En nuestro ejemplo **ABC ≡ MNP**.



Dos figuras son iguales cuando tienen los lados iguales y los ángulos correspondientes iguales. El **signo de igualdad** es =.

En nuestro ejemplo **ABC = MNP**.

Dos figuras son **semejantes** cuando tienen los lados directamente proporcionales y los ángulos correspondientes iguales. En nuestro ejemplo **ABC** y **MNP** son triángulos semejantes.

9.4. Concepto de equivalencia entre figuras.

. Dos figuras son equivalentes cuando tienen la misma superficie, aunque su forma sea distinta

9.5. Teoremas relativos a los triángulos rectángulos.

9.5.1. El teorema de Euclides.

El **teorema de Euclides** tiene dos enunciados que conocemos con los nombres de **teorema del cateto** y **teorema de la altura**.

Teorema del cateto:"El cateto de un triángulo rectángulo es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella".

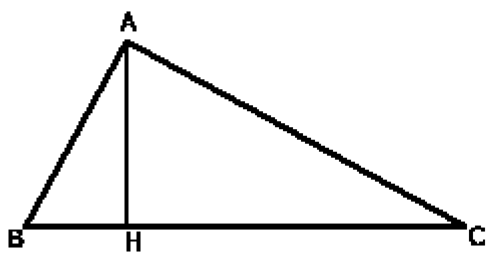
Esto quiere decir que: **AB** = √ **(BH x BC)**, lo que implica que: $\mathbf{AB^2} = \mathbf{BH} \times \mathbf{BC}$

Teorema de la altura: "La altura relativa a la hipotenusa es media proporcional de las proyecciones de los catetos sobre ella".

Esto quiere decir que: **AH** = √ **(BH x HC)**, lo que implica que: $\mathbf{AH^2 = BH \times HC}$

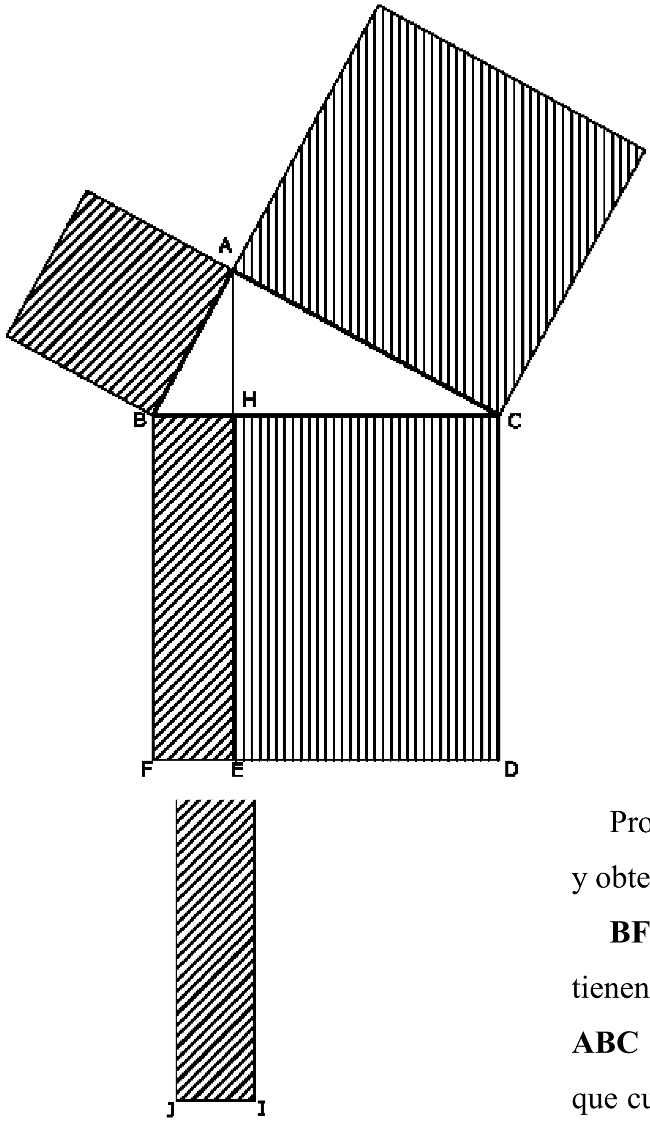
Vamos a demostrarlo.

9.5.2. El teorema de Pitágoras.



El teorema de Pitágoras: "El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos".

Esto quiere decir que: $\mathbf{BC^2 = AB^2 + AC^2}$.



9.5.3. Demostraciones gráficas de los teoremas de Euclides y Pitágoras.

Vamos a demostrar en primer lugar el teorema de **Euclides** referente al **cateto**.

Consideramos un triángulo **ABC** rectángulo en **A**. Dibujamos el cuadrado **ABDE** como se ve en la figura. Dibujamos la altura correspondiente a **A**, siendo su pie el punto **H**. Construimos el rectángulo **BHIJ**, siendo **BJ= BC**.

Se trata de demostrar que el cuadrado **ABDE** y el rectángulo **BHIJ** son equivalentes, es decir: $\mathbf{AB}^2$ = **BH** x **BC**, como indica el teorema.

Prolongamos los lados **DE**, **BJ** y **HI** como indica la figura y obtenemos el paralelogramo **ABFG**.

BF = **BC** porque **ABC** = **BDF**, pues los dos triángulos tienen un lado y dos ángulos iguales: **AB** = **BD**; el ángulo **ABC** = **DBF** y los ángulos en **A** y en **D** rectos. Recordamos que cuando se trazan perpendiculares a un ángulo se obtienen ángulos iguales o suplementarios.

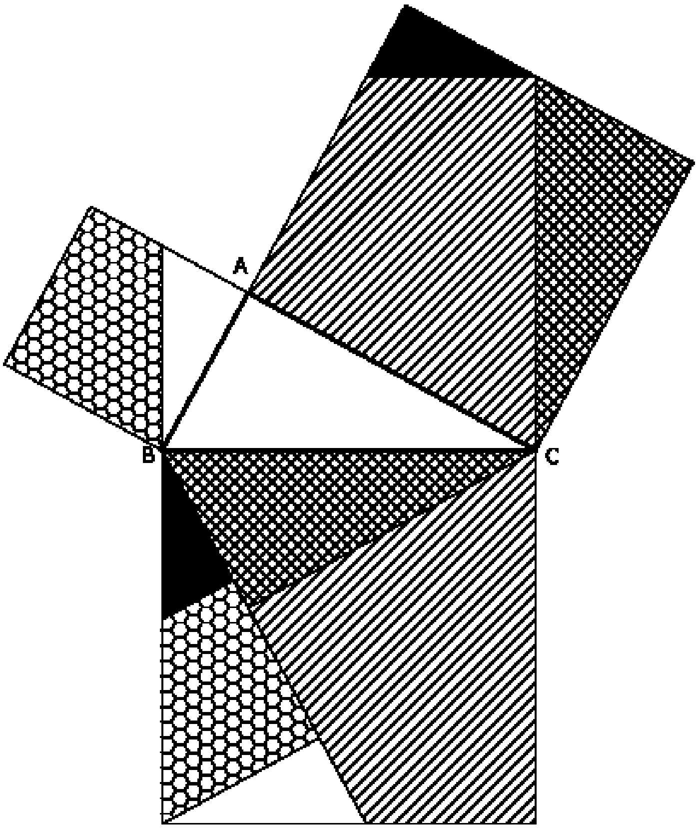
Comprobamos que **ABDE** es equivalente a **ABFG**, porque los dos son paralelogramos con la misma base, **AB** y la misma altura, **AE**.

Por otra parte el rectángulo **AHIJ** es equivalente **ABFG**, porque los dos son paralelogramos con la misma base, **BJ** = **BF** y la misma altura, **BH**. Por lo tanto, el cuadrado **ABDE** es equivalente al rectángulo **BHIJ**, como queríamos demostrar.

Demostramos a continuación el **Teorema de Pitágoras**.

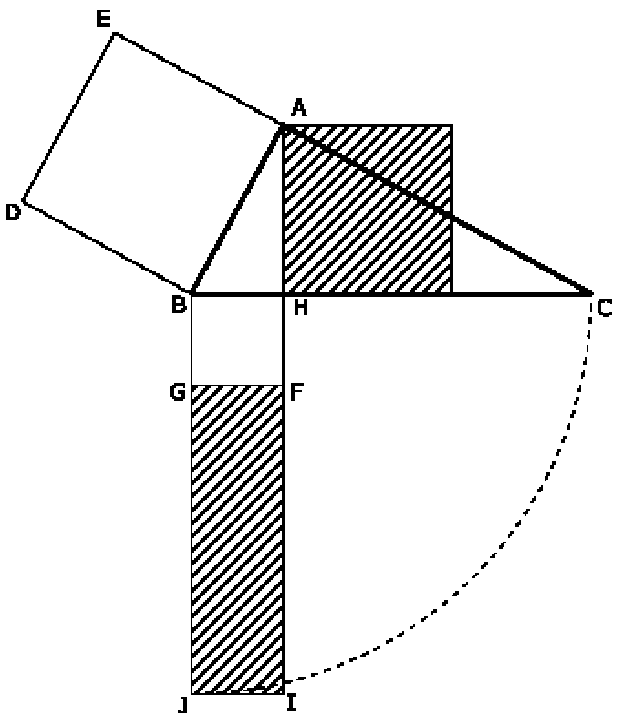
En el triángulo **ABC** de la figura debemos demostrar que $\mathbf{BC}^2 = \mathbf{AB}^2 + \mathbf{AC}^2$.

Aplicamos el **teorema del cateto**. Recordamos su demostración y vemos que el cuadrado de lado **AB** es equivalente, es decir, es de la misma superficie que el rectángulo **BFEH**. Por el mismo teorema, el cuadrado de lado **AC** es equivalente al rectángulo **HEDC**. Como la suma de dichos rectángulos es igual al cuadrado de lado igual a la hipotenusa, el teorema queda demostrado.



El teorema de **Pitágoras** se puede demostrar también haciendo **equiparticiones** de los cuadrados, es decir, dibujándolos y dividiéndolos en partes iguales entre sí. Hay muchos modos de hacerlo. En la figura vemos uno de ellos. Las partes iguales están rayadas del mismo modo.

Vamos a demostrar finalmente el teorema de **Euclides** referente a la **altura**.



Consideramos un triángulo **ABC** rectángulo en **A**. Dibujamos el cuadrado **ABDE** como se ve en la figura. Dibujamos la altura correspondiente a **A**, siendo su pie el punto **H**.

Se trata de demostrar que $\mathbf{AH^2} = \mathbf{BH} \times \mathbf{HC}$, como indica el teorema.

Aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo **ABH**. Dibujamos los cuadrados de lados **AB**, **BH** y **AH**.

Se cumplirá que $\mathbf{AB^2} = \mathbf{AH^2} + \mathbf{BH^2}$, luego: $\mathbf{AB^2}$ $\mathbf{BH^2} = \mathbf{AH^2}$.

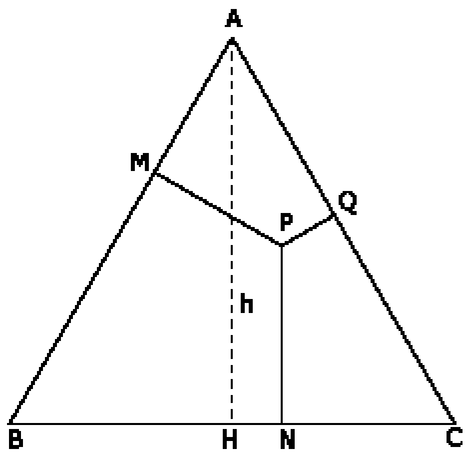
Por el teorema del cateto sabemos que el cuadrado de lado **AB** es equivalente al rectángulo de lados **BH** y **BJ** en el que **BJ** = **BC**. Si restamos de dicho rectángulo el cuadrado de lado **BH** el teorema queda demostrado, pues **GJ** = **HC**. En la figura vemos que las dos figuras equivalentes están rayadas.

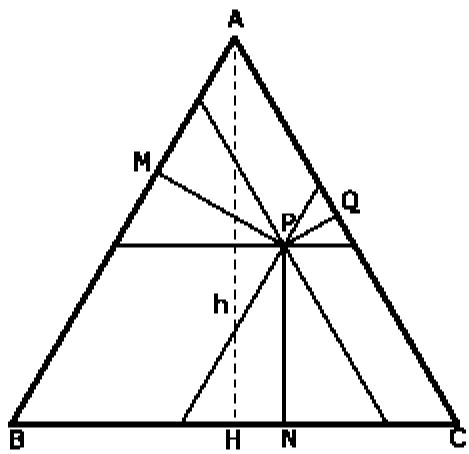
9.6. Teorema relativo al triángulo equilátero.

Teorema de Viviani:"En un triángulo equilátero la suma de las distancias desde un punto interior **P** a los lados del triángulo es igual a la altura del triángulo".

Si el punto **P** fuera exterior la relación se cumple siempre que se consideren negativas una o dos distancias.

Vamos a hacer una demostración gráfica de este teorema, trazando paralelas a los lados del equilátero por el punto **P**. Definimos así tres equiláteros, como vemos en la figura. Recordando que en los paralelogramos los lados opuestos son iguales, es fácil comprobar que la suma de los lados de estos triángulos es igual al lado de **ABC**. Por lo tanto, la suma de sus alturas será igual a la altura de **ABC**.





9.7. Teoremas relativos a todos los triángulos.

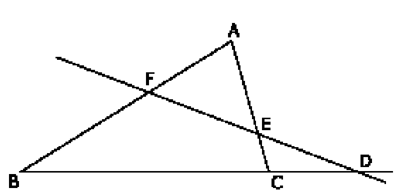
Estos dos teoremas pueden generalizarse a todos los polígonos.

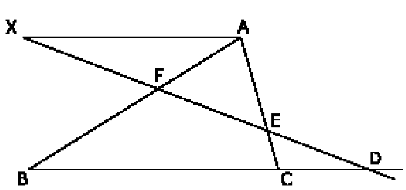
9.7.1. Teorema de Menelao.

"Si **ABC** es un triángulo y **DEF** una recta que corta sus tres lados en **D**, **E** y **F**, se verifica que: **BD/DC** x **CE/EA** x **AF/FB = -1"**

La razón es negativa porque uno de los tres puntos de intersección estará siempre en el exterior del triángulo y su distancia al vértice se considerará negativa. En nuestro ejemplo será negativo **DC**.

Vamos a demostrarlo. Trazamos por **A** una paralela a **BC**. Prolongamos la recta y hallamos el punto **X**.





Se forman dos pares de triángulos semejantes: **XFA** y **FBD**; **AXE** y **CDE**.

Fijándonos en estos triángulos tenemos que: **AX/BD** = **AF/FB** y **AX/-DC= EA/CE**, luego

AX = **AF/FB** x **BD**, por la otra igualdad:

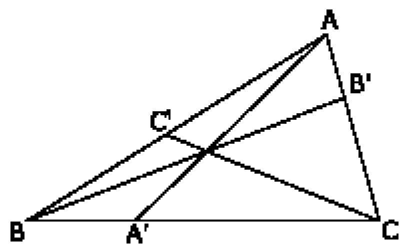
AX = **EA/CE** x (-**DC); **luego**:**

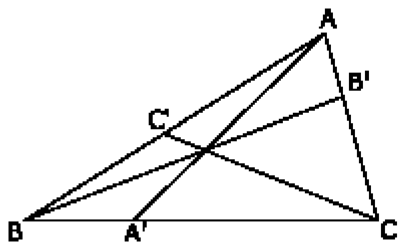
AF/FB x BD = **EA/CE** x (-**DC);**, lo que implica que:

AF/FB x BD/DC x **CE/EA**= **-1**, como afirma el teorema.

9.7.2. Teorema de Ceva.

"La condición necesaria y suficiente para que sean concurrentes tres rectas trazadas desde los vértices **A**; **B** y **C** de un triángulo a los puntos **A'**, **B'** y **C'** de los respectivos lados opuestos es que: $\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1$".





Este teorema está íntimamente ligado al de **Menelao**. Para demostrarlo se consideran los triángulos **ACA'** y **ABA'** cortados respectivamente por **BB'** y **CC'**.

Este teorema se utiliza para demostrar que las alturas, las medianas y las bisectrices de todo triángulo son concurrentes.

Toda recta que pasa por el vértice de un triángulo toma de el nombre **ceviana** de este teorema

9.8. Propiedad relativa al perímetro de los triángulos.

Sea el triángulo **ABC**. Si llevamos las magnitudes **AB** y **AC** sobre la prolongación de **BC**, trazando los arcos de centro **B** y radio **AB** y centro **C** y radio **AC**, como indica la figura, obtenemos un triángulo **AA'A''** que tiene como lado **A'A''** el perímetro del triángulo, ángulo en **A'** = **β/2** y ángulo en **A''** = **γ/2**, siendo **β** y **γ** los ángulos en **B** y en **C** del triángulo.

Esta propiedad es interesante cuando se debe resolver un problema cuyos datos sean o bien el perímetro o bien la suma de dos de los lados de un triángulo.